セル力学系の数理 : 入門(第2&3回複雑系札幌シンポジウム講究録,研究会報告)

高橋, 陽一郎

セル力学系の数理：入門

東京大学数理科学研究科
高橋陽一郎

本報告では、セル力学系に関する数学的な基礎概念についての知見を（非専門家向けに）紹介する．詳細はそれぞれの論文を見て頂きたい．

０．始めに

まだ定着したとは言い難いかもしれないが，近年，複雑系の数理あるいは物理が研究対象として認知されると共に，セル力学系（cell(ular) dynamics）という言葉が使われるようになってきた．ものとしては，これはセル構造オートマトン（cellular automaton）と呼び慣らされてきたものと同じであ

セル構造オートマトンは，よく知られているように，von Neumann が自己再生系のモデルとして導入したものであり，オートマトンの立場からの長い研究の歴史がある．また，約１０年前に，Wolfram 達がこれを複雑系のモデルとして研究するという視点から，コンピュータ実験により様々の現象を提示し，また，ある分類も提唱している．その中には，フラクタル構造をもつ例，ソリトンの構造をもつもの，あるいはそれらが共存するもの等，興味深いものが数多くある．

また，これと前後して，物理学の一部では，未解明の現象，あるいは，理論上は方程式が与えられているが著しく複雑な場合に，セル力学系をその記述手段として用い，現象論的なモデル方程式から，現象を再現することに成功している．Carman 渦（Pomaux達）や，合金の分離現象（イリノイ大学大野克嗣氏）などはその代表例である．このような流れの中から，セル構造オートマトンを力学系として見るという立場が生まれてきた．

一方，数学としては，セル力学系は，空間構造をもつ離散的な力学系の最も簡単な例であり，時空ともに一様な偏微分方程式の離散化はすべてセル力学系である．以下に述べるように，セル力学系は一次元，あるいは，多次元の記号力学系においてシフトと可換な連続写像であり，この観点から，１９５０年代より，セル構造オートマトンの研究とは独立に，その研究が始まって折，とくに，同型問題の視点からの研究論文は数多い．

上述のように，時空ともに一様な偏微分方程式の離散化はすべてセル力学系であり，拡散，波動，等々極めて多様な現象についてその時間発展の記述が可能であり，それ故に，個別の系の詳しい解析の共通基盤を与える数学的な基礎理論の構築が要請される一方，個別の系の解析は出来ても，その多様さを統一する一般論の構築はなかなか難しいのが現状である．

以下，その中でも重要と思われる基礎概念を紹介しる．

1．セル力学系，定義と例

数学的な意味は次節で述べることにして，先ずは，取扱い易い形で，その定義を与えよう．

定義１．次の５つものが与えられたとしよう．
有限集合A（例えば，A＝{０，１}，ただし，０，１は粒子の種類、あるいは、その有無），
格子L　（例えば，１次元格子L＝$\mathbb{Z}$＝整数の全体），
$X=A^L$　または，その部分集合
（つまり、L上の粒子配置$x=(x_i)$，各格子点iにAの元x_iを与えたもの，の全体をXと置く．）
Lの有限部分集合Λ
（例えば、L＝$\mathbb{Z}$として，Λ＝{－１，０，１}）
Λ上の粒子配置のみにより決まり，Aに値をとる写像f
（例えば、Λ＝{－１，０，１}，$f=f(x_{-1},x_0,x_1)$）

Xからそれ自身への写像τは，τxの第i座標が次のように決まるとき，格子L上のセル力学系であるという．

$$(\tau x)_i=f(x_{i+j},\ j\in\Lambda)\qquad(i\in L)$$

このとき，fをτの局所写像（local map）という．

次の例は、代数的構造もあり、オートマトンとしても，力学系としても，問題意識に上ったことはすべて判っているものである。

例１．A＝$\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$＝{０，１}（０＋０＝１＋１＝０，１＋０＝０＋１＝１），L＝$\mathbb{Z}$，Λ＝{－１，０，１}，$f(x_{-1},x_0,x_1)=x_{-1}+x_1$，つまり，

$$(\tau x)_i=x_{i+1}+x_{i-1}$$

例えば，xが$x_i=0$（$x\neq0$），$x_0=1$のとき，τを繰り返し作用させていくと、次のページの図１のように，１つのパターンが形成される．

上のセル力学系τによる時間発展は，これを基本パターンとして，１が疎らにある場合には，基本パターンが衝突すると、相互作用が生ずるものと解釈することができる（図２参照）．

また，yが与えられると，$y=\tau x$を満たすxは，x_0，x_1の値を決めれば，

$x_{i+1}=y_i-x_{i-1}$（$i>1$），$x_{i-1}=y_i-x_{i+1}$（$i<0$）　よりすべて定まる．即ち、τは４対１の上への写像である．

さらに，

x＝・・・・１０１１０１１０１１０１１０・・・・

の場合は，

τx＝・・・・１０１１０１１０１１０１１０・・・・＝x

となり、xはτに関して不動点であり，一般に，周期pが与えられたとき、p周期点xを見出すこと，p周期点の個数を数え上げることなどもさほど難しいことではない．

図1．基本パターン

$$
\begin{array}{rl}
x = & \cdots 0\,0\,0\,0\,0\,0\,0\,0\,0\,0\,0\,1\,0\,0\,0\,0\,0\,0\,0\,0\,0\,0\,0 \cdots \\
\tau x = & \cdots 0\,0\,0\,0\,0\,0\,0\,0\,0\,0\,1\,0\,1\,0\,0\,0\,0\,0\,0\,0\,0\,0\,0 \cdots \\
\tau^{2} x = & \cdots 0\,0\,0\,0\,0\,0\,0\,0\,0\,1\,0\,0\,0\,1\,0\,0\,0\,0\,0\,0\,0\,0\,0 \cdots \\
\tau^{3} x = & \cdots 0\,0\,0\,0\,0\,0\,0\,0\,1\,0\,1\,0\,1\,0\,1\,0\,0\,0\,0\,0\,0\,0\,0 \cdots \\
\tau^{4} x = & \cdots 0\,0\,0\,0\,0\,0\,0\,1\,0\,0\,0\,0\,0\,0\,0\,1\,0\,0\,0\,0\,0\,0\,0 \cdots \\
\tau^{5} x = & \cdots 0\,0\,0\,0\,0\,0\,1\,0\,1\,0\,0\,0\,0\,0\,1\,0\,1\,0\,0\,0\,0\,0\,0 \cdots \\
\tau^{6} x = & \cdots 0\,0\,0\,0\,0\,1\,0\,0\,0\,1\,0\,0\,0\,1\,0\,0\,0\,1\,0\,0\,0\,0\,0 \cdots \\
\tau^{7} x = & \cdots 0\,0\,0\,0\,1\,0\,1\,0\,1\,0\,1\,0\,1\,0\,1\,0\,1\,0\,1\,0\,0\,0\,0 \cdots \\
\tau^{8} x = & \cdots 0\,0\,0\,1\,0\,0\,0\,0\,0\,0\,0\,0\,0\,0\,0\,0\,0\,0\,0\,1\,0\,0\,0 \cdots \\
\tau^{9} x = & \cdots 0\,0\,1\,0\,1\,0\,0\,0\,0\,0\,0\,0\,0\,0\,0\,0\,0\,0\,1\,0\,1\,0\,0 \cdots \\
\tau^{10} x = & \cdots 0\,1\,0\,0\,0\,1\,0\,0\,0\,0\,0\,0\,0\,0\,0\,0\,0\,1\,0\,0\,0\,1\,0 \cdots
\end{array}
$$

（これをスケールし直すと，あるフラクタル集合が得られる．）

次の例は，ほとんど自明な例である．

<u>例2．</u>　$A = \{0,\ 1\}$，$L = \mathbb{Z}$，$\Lambda = \{-1,\ 0,\ 1\}$，

$$
f(x_{-1},\ x_0,\ x_1) = \begin{cases} 1 & (x_{-1}x_0x_1 = 1\,1\,1) \\ 0 & (\text{その他}) \end{cases}
$$

このときは，$x = (x_i)$ の中に0があれば，τ を施す毎に，左右1つずつ0が増えていき，結局，

$$\tau^{n} x \to \cdots 0\,0\,0\,0\,0\,0\,0\,0 \cdots$$

となり、この極限は当然不動点である．もし，0が1つもなければ，つまり，

$$x = \cdots 1\,1\,1\,1\,1\,1\,1\,1 \cdots$$

ならば，$\tau x = x$ となる．

とくに，周期点は2個の不動点のみである．

例えば，

$$
\begin{array}{rl}
x = & \cdots 1\,1\,1\,1\,1\,1\,1\,0\,1\,1\,1\,1\,1\,1\,1\,0\,1\,1\,1\,1\,1\,1\,1 \cdots \\
\tau x = & \cdots 1\,1\,1\,1\,1\,1\,0\,0\,0\,1\,1\,1\,1\,1\,0\,0\,0\,1\,1\,1\,1\,1\,1 \cdots \\
\tau^{2} x = & \cdots 1\,1\,1\,1\,1\,0\,0\,0\,0\,0\,1\,1\,1\,0\,0\,0\,0\,0\,1\,1\,1\,1\,1 \cdots \\
\tau^{3} x = & \cdots 1\,1\,1\,1\,0\,0\,0\,0\,0\,0\,0\,1\,0\,0\,0\,0\,0\,0\,0\,1\,1\,1\,1 \cdots \\
\tau^{4} x = & \cdots 1\,1\,1\,0\,0\,0\,0\,0\,0\,0\,0\,0\,0\,0\,0\,0\,0\,0\,0\,0\,1\,1\,1 \cdots \\
\tau^{5} x = & \cdots 1\,1\,0\,0\,0\,0\,0\,0\,0\,0\,0\,0\,0\,0\,0\,0\,0\,0\,0\,0\,0\,1\,1 \cdots
\end{array}
$$

この例は自明なものであるが，τ による像が順次縮小していくもので，散逸系の玩具と考えることが出来る．また，連続時間力学系としては，次の微分方程式の解の挙動を連想させるものである．

$$dx/dt = 1 - x$$

図２．例１で，１が有限個の場合のパターン形成（．＝０）

```
..........1...............1....................1..........1.
.........1.1.............1.1..................1.1........1.1
........1...1...........1...1................1...1......1...
.......1.1.1.1.........1.1.1.1..............1.1.1.1....1....
......1.......1.......1.......1............1.......1..1.1...
.....1.1.....1.1.....1.1.....1.1..........1.1.....1.11...1..
....1...1...1...1...1...1...1...1........1...1...1..111.1.1.
...1.1.1.1.1.1.1.1.1.1.1.1.1.1.1......1.1.1.1.1.111.1.....
..1...............................1....1..........1.1..1....
.1.1.............................1.1..1.1........1...11.1...
1...1...........................1...11...1......1.1.111..1..
.1.1.1.........................1.1.1111.1.1....1....1.111.1.
......1.......................1....1..1....1..1.1..1..1.1..1
.....1.1.....................1.1..1.11.1..1.11...11.11...11.
1...1...1...................1...11..11..11..111.111.111.111.
.1.1.1.1.1.................1.1.11111111111111.1.1.1.1.1.1..1
1.........1...............1....1............1............111
.1.......1.1.............1.1..1.1..........1.1..........11..
..1.....1...1...........1...11...1........1...1........1111.
.1.1...1.1.1.1.........1.1.1111.1.1......1.1.1.1......11....
....1.1.......1.......1....1..1....1....1.......1....1111...
...1...1.....1.1.....1.1..1.11.1..1.1..1.1.....1.1..11..11..
..1.1.1.1...1...1...1...11..11..11...11...1...1...111111111.
.1.......1.1.1.1.1.1.1.111111111111.1111.1.1.1.1.11.......1.
1.1.....1..............1..........1.1..1.........111.....1.1
.1.1...1.1............1.1........1...11.1.......11.11...1.1.
....1.1...1..........1...1......1.1.111..1.....111.111.1....
...1...1.1.1........1.1.1.1....1....1.111.1...11.1.1.1..1.1.
1.1.1.1.....1......1.......1..1.1..1..1.1..1.111......11....
.......1...1.1....1.1.....1.11...11.11...11..1.11....1111...
......1.1.1...1..1...1...1..111.111.111.11111..111..11..11.1
.....1.....1.1.11.1.1.1.1.111.1.1.1.1.1.1...1111.111111111..
....1.1...1....11.........1.1............1.11..1.1.......11.
```

２．シフトと可換な写像（Hedlund の定理）

セル力学系を定義した土俵を思い起こそう．
有限集合Ａ（例えば，$A=\{0, 1\}$，以下では，アルファベットと称する），
格子Ｌ　（例えば，$L=\mathbb{Z}$＝整数の全体），
A^L　（つまり、Ｌ上の粒子配置 $x=(x_i)$，各格子点ｉにＡの元 x_i を与えたもの）

Ｌは格子であるから，その上には平行移動がある．例えば，$L=\mathbb{Z}$ ならば，その平行移動は次の変換 σ から生成される．σ は通常，（左）シフトと呼ばれる．

$$(\sigma x)_i = x_{i+1}$$

（例えば，

$x=....001010100000111011 10\cdots$

ならば，

$\sigma x=\cdots 00101010000011101110\cdots$ ）

シフト σ は A^L 上の力学系と考えることが出来る．また，A^L の閉部分集合Ｘがシフト不変，つまり，

$$\sigma X = X$$

を満たすならば，σ をＸ上に制限した部分力学系（X, σ）を考えることもできる．これらを総称して，記号力学系、あるいは、単に、シフトという．これに対して，$X=A^L$ であることを明示したいときは，フルシフト（full shift）ということにする．
以下では，$L=\mathbb{Z}$ の場合のみを考える．

公理Ａ系など，典型的に複雑な振る舞いを見せる微分可能力学系（Ｍ，ｈ）は，すべて，記号力学系によって実現できることが知られている．実際に力学系（Ｍ，ｈ）を解析する際には，適切な記号力学系（X, σ）と写像 $r: X\to M$ で，$r\sigma = h\sigma$ を満たすものを発見，構成することにより，その解析をより簡単な記号力学系の解析に帰着させるのが常套手段である．

フルシフトでない記号力学系の代表的なものは次のクラスである．

定義２．　記号力学系（X, σ）がマルコフシフト，あるいは，有限型シフトであるとは，ある非負整数ｐと，直積 A^{p+1} の部分集合Ｗによって，

$$X = X(W) := \{x=(x_i) : (x_i, x_{i+1}, \cdots, x_{i+p}) \in W\}$$

と表されることをいい，Ｗをその構造集合という．
とくに，$p=1$ のマルコフシフトは単純マルコフシフトという．

例３．　$X=\{x=(x_i) : x_i x_{i+1}=00, 01, 10\}$
のとき，（X, σ）は１１が現れないという禁制律に従うマルコフシフトである．
一般に，マルコフシフトにおいて，$p>1$ のときには，長さｐの単語をアルファベットと

見て、つまり，A^pを改めてAと考えることにより，すべてのマルコフシフトは$p=1$の場合に帰着される．

同様の考えによって，セル力学系の局所写像 f を定める際に用いた集合Λは，必要があれば，1点集合，あるいは，2点集合に取り直すことが出来る．

このような簡単な場合に帰着させておくと、以下のように、”視覚的”な取扱いが可能になる．

まず，単純マルコフシフト（X，σ）は，アルファベットAを頂点集合，構造集合Wを辺集合とする有向グラフと対応する．また，このグラフの隣接行列Mと対応させることもできる．

例３．（続き）　$A=\{0,1\}$，$W=\{00,01,10\}$より、グラフとその隣接行列Mは次ページのようになる．（Mの要素１は隣接していること，０は隣接しないことを表す．）

$$M=\begin{array}{cc} & \begin{array}{cc} 0 & 1 \end{array} \\ \begin{array}{c} 0 \\ 1 \end{array} & \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

このように見るととき，Xの元$x=(x_i)$はこのグラフの上の，無限の長さの道に対応する．

なお，行列Mを単純マルコフシフト（X，σ）の構造行列ともいう．

さて，本節の本題に入ろう．

一般に，Xからそれ自身（または，別のシフト）への写像τは，

$$\tau\sigma=\sigma\tau,\ \text{つまり},\quad \tau(\sigma x)=\sigma(\tau x)$$

を満たすとき、シフトと可換であるという．

次の定理の主張は意外性があるが，証明は直積空間の位相とτの連続性の定義から直ちに判ることである．

定理１．（Hedlund）記号力学系において，シフトと可換な連続写像τはセル力学系である．逆も正しい．

とくに，シフトの間の同型写像は全単射なセル力学系である．

証明．逆は，局所写像 f によるセル力学系の定義

$$(\tau x)_i=f(x_{i+j},\ j\in\Lambda)\qquad (i\in L)$$

そのものがシフトと可換なことを保証している．

さて，τが連続写像のとき，アルファベット a に対して，集合

$$\{x=(x_i):x_0=a\}$$

のτによる逆像を考えると、この集合が開集合，かつ，閉集合であるから，逆像も開かつ閉

である．ところで，直積位相空間の位相の定義により，開かつ閉である集合は，ある有限個の格子点での情報だけで決まる集合である．よって，その有限個の格子点の集合をΛとすれば，

$$(\tau x)_0 = f(x_j,\ j \in \Lambda)$$

となる．

ところで，τはシフトと可換であったから，

$$\begin{aligned}(\tau x)_i &= (\sigma^i \tau x)_0 \\ &= (\tau \sigma^i x)_0 \\ &= f((\sigma^i x)_j,\ j \in \Lambda) \\ &= f(x_{i+j},\ j \in \Lambda)\end{aligned}$$

（証明終わり）．

１９６０年代のこの定理は，記号力学系の間の同型の特徴付けという方向性のもとに得られたものである．同型問題は（純粋）数学としては基本的な問題であるから，１つの分野を形成しており，この方向での文献は相当数に上る．しかし，それを紹介することは本報告の目的ではないので省略する．ただ，その中から生まれたソフィック系の概念は自然なものであり，以下でも用いることになるので，紹介しよう．

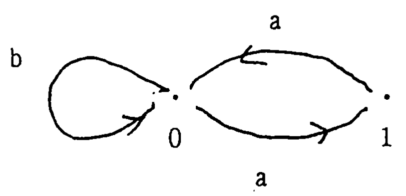
定義３．　記号力学系（Y，σ）があるマルコフシフト（X，σ）の，あるセル力学系τによる像になっているとき，つまり，

$$Y = \tau X$$

と表されるとき，記号力学系（Y，σ）はソフィック（sophic）であるといい，（X，σ）を（Y，σ）の、マルコフ被覆という．

ソフィック系（Y，σ）においては，上で注意したことから，マルコフ被覆（X，σ）を単純マルコフシフトの選び，セル力学系の局所写像を定義する範囲Λを２点集合に取ることができる．その上で（X，σ）を有向グラフで表現しておくと，セル力学系の局所写像ｆはグラフの各辺にＹのアルファベットの元を対応させる写像となる．その元は各辺に与えたラベルと考えることが出来る．即ち，ソフィック系（Y，σ）は，ラベル付き有向グラフに対応させることが出来る．

例４．　例３の単純マルコフシフト（X，σ）をとり，そのグラフで辺０１，１０にラベルａを，辺００にラベルｂを付ける．



これに対応するソフィック系を（Y，σ）とすると，このグラフでは，０から１に行くと次は必ず０に戻るから，Ｙの元ｙは次の性質（＊）によって特徴づけられる．

（＊）　$y_i = b,\ y_{i+1} = \cdots = y_{i+j} = a,\ y_{i+j+1} = b$

ならば，ｊは偶数である．

ところで，上の（＊）のような制約条件は，ｊがいくらでも大きくなり得るから，一定の長さｐだけの格子点を観測することでは判定できない．よって，例４で得られたソフィック系（Ｙ，σ）はマルコフシフトでは有り得ない．即ち，ソフィックはマルコフより真に広いクラスである．

数学的な美意識からは，ソフィック系の定義を次の定理により，半群を用いた定義に言い換える方が好まれている．

<u>定理２．</u>（E.M.Coven and M.E.Paul, Israel J. Math. 20-2(1975)）アルファベットＡ上の記号力学系（Ｙ，σ）がソフィックであることと，次のことは同値である．
　ある有限半群Ｓとその生成系Ａ（以下、アルファベットと同一視する）によって、次のように表現できる．

（☆）　$Y=\{y=(y_i)$：各ｉとｊ≥ 0に対して，
$$y_i y_{i+1}\cdots y_{i+j}\neq 0\}$$

ただし，０はＳの元で、$s0=0s=0$を満たすものとする．

<u>定義３’．</u>　記号力学系（Ｙ，σ）がある有限半群Ｓを用いて，（☆）によって表されるとき，記号力学系（Ｙ，σ）は<u>ソフィック</u>（sophic）であるという．

注意．この定理２は抽象的な形で述べているが、実際は、対応するラベル付き有向グラフから，０と１を要素とする行列からなる半群によりＳを構成する（また、構成し直す）ことが出来，０は零行列となる．この際の行列の積は，｛０，１｝をブール代数と考えて定める．

<u>例４．</u>（続き）例４のソフィック系（Ｙ，σ）では、そのラベル付き有向グラフを睨んで，ブール代数｛０，１｝上の２次正方行列M_a，M_bを

$$M_a=\begin{bmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{bmatrix},\qquad M_b=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}$$

により定めると，これらから乗法に関して生成される半群が，上の定義２’の条件（☆）を満たす半群Ｓである．
　実際，容易に判るように，$n=0, 1, 2, \cdots$のとき，

$$M_b M_a^{2n+1} M_b=0$$
$$M_b M_a^{2n} M_b=M_b\neq 0$$

が成り立っている．これは上述のＹに対する制約条件（＊）を半群Ｓの言葉で言い換えたものである．

前ページの定理２により，半群Ｓの掛算表が与えられれば，ソフィック系（Ｙ，σ）が１つ定まることになるが，残念ながら，一般の場合にこれを有効に利用した研究はまだ無いようである．

むしろ，注意に述べ，例示した構成法そのものに意味があり，個別に与えられたソフィック系を解析する際には，ラベル付き有向グラフを描いて，そこから各ラベルに対応する行列を定め，必要な計算を実行することによって，力学系の特性量，例えば，周期点の個数や，位相的エントロピー，エントロピー最大の不変確率測度などを求めることが可能である．

また，ここではマルコフ系，ソフィック系に対応するグラフの話のみにとどめたが，それぞれ，オートマトン理論，あるいは，形式的言語理論の言葉などに置き換えることも当然可能である．

３．ゼータ関数とエントロピー

力学系の研究の主対象は，時間発展のもとでの軌道の振る舞いである．とくに，時間nが無限に大きくなるときの挙動を大域的に把握することが主要な関心事である．とくに，散逸系の場合は，アトラクタを調べることが大切であるが，これに関連することは次節で述べることにして，基本的な概念から始めよう．

時間発展が最も簡単なものは，やはり，周期軌道である．１つの力学系のもつ周期点全体の構造に対する示性量として，次のものがある．

<u>定義４．</u>　力学系(M, h)に対して，hのn回の繰り返しh^nのもつ不動点の数を

$$F(n) = \# \{x : h^n x = x\} \qquad (n \geq 1)$$

と書き，ベキ級数$Z(t)$を

$$Z(t) = \exp\{\Sigma \quad F(n)\, t^n / n\}$$

で定め，力学系(M, h)の<u>ゼータ関数</u>という．

２つの力学系(M, h)，(M', h')が同型であれば，周期点の間には１対１対応があるから，ゼータ関数は一致する．つまり，ゼータ関数は不変量である．

単純マルコフシフトの場合は，下の例５から判るように，構造行列Mを用いるとゼータ関数を計算することができ，次のようになる．

<u>定理３．</u>構造行列Mをもつ単純マルコフシフトのゼータ関数は

$$Z(t) = 1 / \det(I - tM)$$

で与えられる．

<u>例５．</u>　例３のマルコフシフト(X, σ)の場合，アルファベットは$A = \{0, 1\}$，構造集合は$W = \{00, 01, 10\}$であったから，$x = (x_i)$がXに属することは，つねに

$$x_i x_{i+1} = 00,\ 01,\ 10$$

を満たすことと同値である．

また，Xに属する文字列$x = (x_i)$がσ^nの不動点である，つまり，

$$\sigma^n x = x$$

を満たすことは，

$$x_{i+n}=x_i$$

と同値である．

よって，σ^nの不動点xは

$$M(x_0, x_1)=M(x_1, x_2)=\cdots=M(x_{n-1}, x_0)=1$$

を満たすアルファベットのn個の元 $x_0, x_1, x_2, \cdots, x_{n-1}$
と１対１に対応する．

ゆえに，

$$F(n) = \mathrm{tr}\ M^n.$$

これより，

$$\begin{aligned} Z(t) &= \exp\{\Sigma\ F(n)\ t^n/n\} \\ &= \exp\{\Sigma\ \mathrm{tr}\ t^n M^n/n\} \\ &= \exp\{\mathrm{tr}\ \Sigma\ t^n M^n/n\} \\ &= \exp\{-\mathrm{tr}\ \log(I-tM)\} \\ &= 1/\det(I-tM) \\ &= 1/(1-t-t^2) \end{aligned}$$

となる．

次に，位相的エントロピーを導入しよう．その定義を一般的に述べるのは面倒なので，記号力学系の場合のみに定義を与える．

<u>定義５．</u> 記号力学系（X，σ）に現れる長さnの単語（有限文字列）の総数をN（n）として，その増大度

$$h(X, \sigma)=\lim\ n^{-1}\log N(n)$$

を記号力学系（X，σ）の<u>位相的エントロピー</u>という．

位相的エントロピーは位相同型のもとでの不変量であり，力学系のもつ軌道の多様さを表す量と考えることができる．

<u>例６．</u> 例３のマルコフシフト（X，σ）の場合，

$$x_1x_2\cdots x_n$$

が長さnの単語であることは、

$$M(x_1, x_2)=\cdots=M(x_{n-1}, x_n)=1$$

を満たすことと同値だから，$\underline{1}$で成分がすべて１のベクトルを表すと，

$$N(n)=\langle M^{n-1}\underline{1}, \underline{1}\rangle$$

よって，行列Mの最大固有値をλとすれば，$\lambda=(1+\sqrt{5})/2$（黄金数）であり，

$$
\begin{aligned}
h(X,\sigma) &= \lim\ n^{-1}\log N(\dot{n})\\
&= \lim\ n^{-1}\log \langle M^{n-1}\underline{1},\ \underline{1}\rangle\\
&= \log\lambda\\
&= \log\ (1+\sqrt{5})/2
\end{aligned}
$$

となる．

以上のことから，次の定理を推測することができる．

定理４．構造行列Ｍをもつ単純マルコフシフトの位相的エントロピーは，行列Ｍの最大固有値をλとすれば，

$$h(X,\sigma)=\log\lambda$$

で与えられる．

注意．上の２つの定理により，位相的エントロピーはゼータ関数から計算されることが判る．実際，

$$
\begin{aligned}
Z(t) &= 1/\det(I-tM)\\
&= 1/\Pi(1-t\alpha)
\end{aligned}
$$

（ただし，積ΠはMのすべての固有値αについて取る．）

であったから，$1/\lambda$は$Z(t)$の最小の正の極である．つまり，

$$h(X,\sigma)=-\log\ (Z(t)\text{の最小の正の極})$$

なお，古典的な積分方程式論との類比から，行列式

$$D(t)=\det(I-tM)$$

はこの記号力学系のフレドホルム行列式と呼ばれているこの言葉を用いると，

$$h(X,\sigma)=\log\ (D(t)\text{の最小の正の零点})$$

となる．

以上から，記号力学系の周期点やエントロピーの計算に当たっては，ゼータ関数，あるいは，フレドホルム行列式の計算が重要となることが判る．しかし，純粋数学としても、行列Ｍのサイズが大きいときに，これらの行列式を求めることは一般には容易ではない．この際には，軌道基（orbit basis）という概念が有用である．（Y. Takahashi, Osaka J. Math. (1980)）これも一般的に述べると煩わしいので，例示にとどめる．

再び，例３の単純マルコフシフト（X,σ）を考えよう．このとき，構造集合は，

$$W=\{00,\ 01,\ 10\}$$

であり，文字列１１はＸに現れることは出来ない．したがって，Ｘに現れる文字列は，０が現れた場所から右に読み取っていくと，次の集合Ｂに属する２つの元を並べたものとなる．

$$B = \{0,\ 01\}$$

例えば，

$$\cdots\cdot 0101001000101 0\cdots\cdot\ .$$

ここで重要なことは，逆に、Bの元を勝手に並べてものはすべてXに現れ得ることである．

このような場合，記号力学系（X，σ）の<u>軌道基</u>Bをもつという．

軌道基Bは一般には有限とは限らない．また，1つのBにより，Xを尽くすことも一般にはできず，そのときには、Bを複数用意することになる．

<u>定理5．</u>　記号力学系（X，σ）が唯1つの軌道基Bから生成されるとき，そのフレドホルム行列式は次のようになる．

$$D(t) = 1 - \Sigma\, t^{l(b)}$$

ここで，和Σは軌道基Bについて取り，l（b）はBの元bの単語としての長さである．一般に，Xが軌道基B_1，B_2，・・・，B_mから生成される場合は，それぞれの軌道基に対応するフレドホルム行列式を$D_1(t)$，$D_2(t)$，・・・，$D_m(t)$とすれば，

$$D(t) = D_1(t)\, D_2(t) \cdots D_m(t)$$

となる．

例3の単純マルコフシフト（X，σ）のときは，

$$B = \{0,\ 01\},\ l(0) = 1,\ l(01) = 2$$

より，

$$D(t) = 1 - \Sigma\, t^{l(b)} = 1 - t - t^2$$

と計算される．

また，例4のソフィック系（Y，σ）の場合は，ラベル付きグラフを眺めれば，その軌道基は

$$B = \{aa,\ b\}$$

であることが判るから，やはり，

$$D(t) = 1 - \Sigma\, t^{l(b)} = 1 - t - t^2$$

であり，とくに，例3，4の場合の位相的エントロピーは一致していることが判る．つまり，

$$h(X,\sigma) = h(Y,\sigma)$$

が成り立つ．

なお，これは偶然の一致ではなく，ソフィック系に対して，エントロピー最小のマルコフ被覆を常に選ぶことが出来，そのとき，エントロピーはもとのソフィック系のものと等しい．これはその例となっている．

定理５の公式はたいへん便利であるが，一見したところ不思議な公式である．実は，その証明は初等的なものであり，記号基の元を並べて得られる周期列と，Ｘに現れる周期点との対応を丹念に調べればよい．

残念ながら，記号力学系のゼータ関数は不変量として，マルコフシフトに限定しても，完全ではない．つまり，同じゼータ関数をもち，互いに同型でない２つのマルコフシフトが存在する．（Sh. Ito and Y. Takahashi, Osaka J. Math(1974)）

従って，同型問題の研究には，より詳しい性質を調べる必要がある．

しかし，我々の観点からは，同型の問題は，セル力学系が”保存系”と考えられる場合であって，複雑系のもつ散逸構造そのものの研究にはつながらないので，省略して，以下では”保存系”でない場合を扱う．

４．散逸系の場合．

（Ｙ，σ）をソフィック系として，セル力学系τ：Ｙ→Ｙによる像τ（Ｙ）がＹの真部分集合になる場合は，τを散逸系と考えることが出来る．このような場合は，

$$Y,\ \tau(Y),\ \tau^2(Y),\ \tau^3(Y),\ \cdots$$

は小さくなって行き，その極限がどのような構造をもつかが問題となる．また，Ｙ自身でなく，Ｙの部分集合についても同様なことが問題となる．

一般の力学系について、それは通常，次に定義するアトラクタの研究となる．

<u>定義６．</u>　コンパクト力学系（Ｘ，ｆ）において、Ｘの空でない閉部分集合Ａがアトラクタであるとは、次の条件を満たすＡを含む開集合Ｕが選べることをいう．

Ｕの閉包 clＵの像ｆ（clＵ）がＵに含まれ，

Ａはf^nU，$n \geq 1$，の共通部分である．

また，集合の包含関係に関して極小なアトラクタを極小アトラクタという．

セル力学系に関して少し詳しい情報を述べるためには，さらに次の概念が必要である．

<u>定義６’．</u>　コンパクト力学系（Ｘ，ｆ）において、Ｘの空でない閉部分集合Ｑが，加算無限個のアトラクタA_nの共通部分として書けるとき，準アトラクタであるという．

また，集合の包含関係に関して極小な準アトラクタを極小準アトラクタという．

これらの概念を用いると，セル力学系の時間が無限大での状況は，次のように分類される．
（M. Huxley, Ergodic Theory and Dynamical Systems 10(1990)）

<u>定理６．</u>　フルシフト上のセル力学系τに対して，次のうち３つのうちのいずれか１つが成立する．ただし，μはフルシフト上の一様ベルヌーイ測度とする．

（１）極小アトラクタＡが唯１つ存在する．このとき，次のことも成り立つ．

$$\sigma A = A,$$
$$\mu(\quad \tau^{-n} A) = 1$$

（2）極小準アトラクタQが唯1つ存在する．このとき，次のことも成り立つ．

$$\sigma Q = Q,$$
$$\mu(\quad \tau^{-n} Q) = 1 \quad \text{または} \quad \mu(\tau \text{のchain component}) = 0$$

（3）非加算無限個の準アトラクタが存在する．このとき，τ の chain component の basin の測度はすべて0に等しい．

上の（1）は（ベルヌーイ測度に関して）ほとんどすべての点が唯1つのアトラクタに吸い込まれていくというもので，通常よく扱う微分可能な力学系のイメージからもわかりやすい．しかしとくに，（3）はわかりにくいかも知れない．これは次のような状況を表している．

セル力学系では，シフトと可換であるが故に，”大きな”（準）アトラクタが壊れる場合は，無数の”非常に小さな”準アトラクタに分解し，フラクタルな構造が出現する．

さて，上の定理はまだ十分とはいえず，マルコフ系，ソフィック系への拡張は未証明ではあるが，とりあえずこれによって，$n=\infty$ での状況が判ったことにして先に進むことにすれば，次の問題は，散逸的な場合において，

$$Y,\ \tau(Y),\ \tau^2(Y),\ \tau^3(Y),\ \cdots$$

がどのように小さくなって行くかである．
この問題に関して，行木孝夫氏は以下のような接近を試みている．
その出発点は次の事実である．

<u>定理7．</u>（T. Namiki）（X, σ），（Y, σ）をソフィック系として，セル力学系 τ：$X \to Y$ を考える．τ の局所写像 f の選び方は1通りではないが，次の極限は，（Y, σ）の任意の不変確率ボレル測度 μ に関してほとんどすべての点 y に対して，存在し，かつ，τ を表す局所写像 f の選び方によらない．

$$h(y;\tau) = \lim \ n^{-1} \log \# f^{-1}([y]_n)$$

ただし，$\# f^{-1}([y]_n)$ は単語 $[y]_n = y_0 y_1 \cdots y_{n-1}$ の局所写像による逆像の個数であり，degree function と呼ばれる．
さらに，（Y, σ）の不変測度 μ がエルゴード的ならば，
μ に関してほとんどすべての点 y に対して，$h(y) =$ 定数．

注意．もちろん、上の定数は，セル力学系 τ と（Y, σ）の不変確率ボレル測度 μ 毎に決まり，これは，不変測度付き力学系（Y, σ, μ）に対する不変量である．とくに，μ が1つの周期軌道上の一様分布の場合，この定数は，τ をラベル付きグラフで表示し，例4のような行列 M_a，M_b を導入しておくと，直ちに計算できる量である．

上の量ｈ（ｙ；τ）に対して，いくつかの重要な性質が成り立つことが判っている．その中でも，次の性質は不変量ｈ（ｙ；τ）の導入の正当性を保証するものである．

定理８．（T. Namiki）　（Ｘ，σ）をソフィック系，τをその上のソフィック系，Ｙ＝τ（Ｘ）とする．νを（Ｘ，σ）の任意の不変確率ボレル測度，μをτによって（Ｙ，σ）上に誘導される不変確率ボレル測度とすると，測度論的エントロピーに関して次のことが成り立つ．

（１）一般に，不等式

$$h(X, \sigma, \nu) \leqq h(Y, \sigma, \mu) + \int h(y; \tau)\, \mu(dy)$$

が成り立つ．

（２）もし，ν，μが（Bowen の意味で）ギッブス測度ならば，等式

$$h(X, \sigma, \nu) = h(Y, \sigma, \mu) + \int h(y; \tau)\, \mu(dy)$$

が成り立つ．

ここでは，（Bowen の意味での）ギッブス測度の定義（R. Bowen, Ergodic Theory for Axiom A Diffeomorphisms, Springer, 1973）とその説明は省略するが，通常計算可能なベルヌーイ測度，マルコフ測度等はすべてギッブス測度であるから，上の定理は次のように読んでよい．

たちの良いセル力学系に対しては，（２）の等式が常に成立する．

なお，この種の定理によくあることであるが，（１）は成り立つが（２）が成り立たない例は今のところ知られていない．（おそらく，かなり病的なものと予想される．）

∞．付記

以下，ここでは紹介できなかった，ソフィック系に対して一般的に成り立つ事実，および，保存的なセル力学系に成り立つ事実の中から，興味深いものを３つ拾って，本報告を終わりたい．

ソフィック系のもつ最大エントロピー測度の研究は重要なものの１つである．この方向で顕著な結果は次のものである．

１）位相推移的なソフィック系（Ｙ，σ）に対しては，同じ位相的エントロピーをもつ位相推移的なマルコフ被覆（Ｘ，σ）が存在する．また，周期点が稠密であることと，正則な最大エントロピー測度が存在することとは同値である．（E. M. Coven and M. E. Paul, loc. ibid.）

記号力学系の位相同型に関しては、Krieger たちの一連の研究があるが，コーディングの立場から具体化したものとして，次のものがある．

２）記号力学系の間の位相同型は有限個の２部コードの合成で表現できる．（M. Nasu, Ergodic Theory and Dynamical Systems 6(1986), 265-280）

どのようなセル力学系がハミルトン系に相当し，これに対して統計力学が成立するか、とくに、ボルツマン分布に従うか否についての研究が武末（京大）を中心に続けられている．
そこでは，加法的保存量が幾つあるかが重要なファクターである．

３）ソフィック系（Ｙ，σ）上の関数Ｈは，周期点$\sigma^k y = y$について常に，

$$H(x) + H(\sigma x) + \cdots + H(\sigma^k x) \qquad (x = \tau y)$$
$$= H(y) + H(\sigma y) + \cdots + H(\sigma^k y)$$

が成り立つとき，加法的保存量であるという．
（たとえば，T. Hattori and S. Takesue, Physica 49D(1971)）